

О ВНУТРЕННЕЙ КОМПАКТНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕГУЛЯРНЫХ
РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Р.З.ГУМБАТАЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

В работе дано определение внутренней компактности пространства регулярных решений однородного операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка и указаны достаточные условия для внутренней компактности этих решений, причем главная часть уравнения имеет крапную характеристику. Доказана теорема типа Фрагментации Линдельефа для регулярных решений одного класса однородного операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка, причем найденные условия выражены через операторные коэффициенты операторно-дифференциальных уравнений.

1. Введение

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A – положительно-определенный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$. Обозначим через $L_2(R_+; H)$ ($R_+ = (0, \infty)$) гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$, определенных в R_+ почти всюду, со значениями в H , измеримых, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера, причем

$$\|f\|_{L_2(R_+; H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f\|_H^2 dt \right)^{1/2}.$$

Далее, определим гильбертовы пространства [1]:

$$\begin{aligned} W_2^3((a, b); H) &= \left\{ u / u''', A^3 u \in L_2(R_+; H), \|u\|_{W_2^3((a, b); H)} = \right. \\ &= \left. \left(\|u'''\|_{L_2((a, b); H)}^2 + \|A^3 u\|_{L_2((a, b); H)}^2 \right)^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} W_2^4((a, b); H) &= \left\{ u / u^{(4)}, A^4 u \in L_2(R_+; H), \|u\|_{W_2^4((a, b); H)} = \right. \\ &= \left. \left(\|u^{(4)}\|_{L_2((a, b); H)}^2 + \|A^4 u\|_{L_2((a, b); H)}^2 \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H операторно-дифференциальное уравнение

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) \equiv \left(-\frac{d^2}{dt^2} + A^2\right)^2 u(t) + \sum_{j=0}^3 A_{4-j} u^{(j)}(t) = 0, t \in R_+, \quad (1)$$

где $u(t)$ - искомая вектор-функция, определенная на R_+ со значениями из H , а операторы A и A_j ($j = \overline{1, 4}$) – удовлетворяют следующим условиям:

- 1) A - самосопряженный положительно-определенный оператор, т.е. $A = A^* > cE (c > 0)$;
- 2) A^{-1} - вполне непрерывный оператор в H ;
- 3) операторы $B_j = A_j \cdot A^{-j} (j = \overline{1,4})$ ограничены в H .

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории обобщенных функций [1].

Отметим, что в работе [2] Лакса дано определение внутренней компактности для некоторых пространств решений в бесконечном интервале и указана его тесная связь с принципом Фрагмена-Линдельефа для решений эллиптических уравнений.

Пусть $S \subset L_2(R_+; H)$ некоторое пространство вектор-функций, инвариантных относительно сдвига, т.е. если $u(t) \in S$, то при любом $\eta > 0$ вектор-функция $u(t + \eta) \in S$. Для любого $0 < a < b < \infty$ введем обозначение

$$\|u\|_{(a,b)}^2 = \int_a^b \|u\|_H^2 dt.$$

Определение 1. Пространство $S \subset L_2(R_+; H)$ называется внутренне компактным, если

$$Q_M = \{u / u \in S, \|u\|_{(a,b)} \leq M\}$$

предкомпактно в норме $\|u\|_{(a',b')}$ для любых M и (a',b') , таких, что $a < d < b' < b$.

Ясно, что при $0 \leq a < b < \infty$ $W_2^4((a,b); H) \subset W_2^3((a,b); H)$ как плотное множество и это вложение компактно ([1]). Обозначим через $Ker(P, R_+)$ множество решений из пространства $W_2^4(R_+; H)$ операторно-дифференциального уравнения (1), т.е. пространство регулярных решений уравнения (1):

$$Ker(P, R_+) = \{u / P(d/dt)u = 0, u \in W_2^4(R_+; H)\}.$$

Так как при выполнении условий 1)-3) оператор $P: W_2^4(R_+; H) \rightarrow L_2(R_+; H)$ непрерывен, то $Ker(P, R_+)$ - замкнутое пространство.

Мы устанавливаем свойства внутренней компактности пространства $Ker(P, R_+)$ по норме $\|u\|_{W_2^3(R_+; H)}$, которая слабее нормы пространства $W_2^4(R_+; H)$.

Определение 2. Пусть $Ker(P, R_+)$ - множество регулярных решений уравнения (1). Обозначим через $L(P, R_+)$ замыкание пространства $Ker(P, R_+)$ по норме $W_2^3(R_+; H)$. Если для любых $0 \leq a < a' < b' < b < \infty$, где (a,b) и (a',b') любые пары, и для любого $M > 0$ множество

$$Q_M = \{u / u \in L(P, R_+), \|u\|_{W_2^3((a,b), H)} \leq M\}$$

является компактным множеством в норме пространства $W_2^3((a',b'); H)$, то будем говорить, что пространство $Ker(P, R_+)$ внутренне компактно по норме пространства $W_2^3(R_+; H)$.

2. Основной результат

А сейчас докажем основную теорему. Имеет место следующая

Теорема. Пусть выполняются условия 1)-3) и для вектор-функций

$u \in W_2^0(R_+; H, \{v\}_{v=0}^3)$ имеет место неравенство

$$\|P(d/dt)u\|_{L_2(R_+, H)} \geq \text{const} \cdot \|u\|_{W_2^4(R_+, H)}. \quad (2)$$

Тогда пространство $L(P, R_+)$ внутренне компактно и существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любой функции $u(t) \in L(P, R_+)$ имеет место

$$\int_0^\infty e^{-2\varepsilon_0 t} \left(\|u^{(3)}\|_H^2 + \|A^3 u\|_H^2 \right) dt < \infty,$$

здесь $W_2^0(R_+; H, \{v\}_{v=0}^3) = \{u / u \in W_2^4(R_+; H), u^{(j)}(0) = 0, j = \overline{0, 3}\}$.

Доказательство. Пусть $u(t) \in \text{Ker}(P, R_+)$. Тогда очевидно, что для любого $\eta > 0$ $u(t + \eta) \in \text{Ker}(P, R_+)$, т.е. $\text{Ker}(P, R_+)$ - инвариантное пространство относительно сдвига. Очевидно, что для любой функции $\varphi(t) \in C^\infty(a, b)$, такой, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in (a', b') \\ 0, & t \notin (a', b') \end{cases},$$

вектор-функция $v(t) = \varphi(t) \cdot u(t) \in W_2^0(R_+; H, \{v\}_{v=0}^3)$, здесь $0 < a < a' < b' < b$. Тогда по неравенству (2) получаем

$$\|P(d/dt)v\|_{L_2(R_+, H)} \geq \text{const} \cdot \|v\|_{W_2^4(R_+, H)}.$$

Так как $v(t) = 0$ при $t \in (a, b)$, то

$$\begin{aligned} \|P(d/dt)v\|_{L_2(R_+, H)} &= \|P(d/dt)(\varphi u)\|_{L_2(R_+, H)} \geq \text{const} \cdot \|\varphi u\|_{L_2(R_+, H)} = \\ &= \text{const} \cdot \left(\int_a^b \left(\|(\varphi u)^{(4)}\|^2 + \|A^4(\varphi u)\|^2 \right) dt \right)^{1/2} \geq \text{const} \cdot \left(\int_a^{b'} \left(\|(\varphi u)^{(4)}\|^2 + \|A^4(\varphi u)\|^2 \right) dt \right)^{1/2} = \\ &= \text{const} \cdot \left(\int_a^b \left(\|u^{(4)}\|^2 + \|A^4 u\|^2 \right) dt \right)^{1/2} = \text{const} \cdot \|u\|_{W_2^4((a, b), H)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как

$$\begin{aligned} P(d/dt)v(t) &= \left(-\frac{d^2}{dt^2} + A^2 \right) v(t) + \sum_{j=1}^4 A_j \frac{d^{4-j}}{dt^{4-j}} v(t) = \\ &= \left(\frac{d^4 u}{dt^4} + A^4 u - 2A^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \sum_{j=1}^4 A_j \frac{d^{4-j}}{dt^{4-j}} \right) \varphi(t) + \\ &+ \sum_{j=1}^4 \binom{q}{4} \varphi^{(q)} u^{(4-q)} - 2 \sum_{j=1}^2 \binom{q}{2} \varphi^{(q)} u^{(2-q)} + \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^{4-j} \binom{p}{4-j} \varphi^{(q)} u^{(4-j-p)} = \\ &= \varphi(t) P(d/dt)u(t) + \sum_{q=0}^3 \binom{q+1}{4} \varphi^{(q+1)} u^{(3-q)} - 2 \sum_{q=0}^1 A^2 \binom{q+1}{2} \varphi^{(q+1)} \times \\ &\times u^{(1-q)} + \sum_{j=1}^3 \sum_{p=0}^{3-j} \binom{p+1}{4-j} \varphi^{(p+1)} u^{(3-q-j)}, \end{aligned}$$

то из условия $u(t) \in \text{Ker}(P, R_+)$ следует, что $P(d/dt)u(t) = 0$, поэтому из (3) следует, что

$$\|P(d/dt)v\|_{L_2(R_+, H)} = \|Pv\|_{L_2((a, b), H)} = \left\| \sum_{q=0}^3 \binom{q+1}{4} \varphi^{(q+1)} u^{(3-q)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \sum_{q=0}^1 \binom{q+1}{2} \varphi^{(q+1)} u^{(1-q)} + \sum_{j=1}^3 \sum_{p=0}^{3-j} \binom{p+1}{4-j} \varphi^{(p+1)} u^{(3-p-j)} \Big\|_{L_2((a,b),H)} \geq \\
& \geq \text{const} \cdot \|u\|_{W_2^4((a',b'),H)}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{q=0}^3 \binom{q+1}{4} \varphi^{(q+1)} u^{(3-q)} \right\|_{L_2((a,b),H)} \leq \sum_{q=0}^3 \binom{q+1}{4} \max_{t \in (a,b)} |\varphi^{(3-q)}| \times \\
& \times \|A^{-q} (A^q u^{(3-q)})\|_{L_2((a,b),H)} \leq \text{const} \cdot \sum_{q=0}^3 \binom{q+1}{4} \|A^{-q}\| \|A^q u^{(3-q)}\|
\end{aligned}$$

то применяя последнему неравенству теорему о промежуточных производных получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{q=0}^3 \binom{q+1}{4} \varphi^{(q+1)} u^{(3-q)} \right\|_{L_2((a,b),H)} \leq \text{const} \cdot \sum_{q=0}^3 \binom{q+1}{4} \|A^{-q}\| \times \\
& \times \|u\|_{W_2^3((a,b),H)} \leq \text{const} \cdot \|u\|_{W_2^3((a,b),H)}
\end{aligned}$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{q=0}^1 A^2 \binom{q+1}{2} \varphi^{(q+1)} u^{(1-q)} \right\|_{L_2((a,b),H)} \leq \sum_{q=0}^1 \binom{q+1}{2} \max |\varphi^{(q+1)}| \times \\
& \times \|A^2 u^{(1-q)}\|_{L_2((a,b),H)} \leq \text{const} \cdot \sum_{q=0}^1 \|A^{-q}\| \cdot \|A^{2+q} u^{(1-q)}\|_{L_2((a,b),H)} \leq \\
& \leq \text{const} \cdot \|u\|_{W_2^3((a,b),H)}.
\end{aligned}$$

Аналогично, получаем, что

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{j=0}^3 A_j \left(\sum_{p=0}^{3-j} \binom{p+1}{4-j} \varphi^{(p+1)} u^{(3-p-j)} \right) \right\|_{L_2((a,b),H)} \leq \left\| \sum_{j=0}^3 A_j \cdot A^{-j} \left(\sum_{p=0}^{2-j} A^j \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \binom{p+1}{3-j} \varphi^{(p+1)} u^{(2-p-j)} \right) \right\|_{L_2((a,b),H)} \leq \sum_{j=0}^3 \sum_{p=0}^{3-j} \|A_j \cdot A^{-j}\| \left\| \sum_{p=0}^{2-j} \binom{p+1}{3-j} \times \right. \\
& \times \max |\varphi^{(p+1)}| \|A^j u^{(3-(p+j))}\|_{L_2((a,b),H)} \leq \sum_{j=0}^3 \sum_{p=0}^{3-j} \|A_j \cdot A^{-j}\| \times \\
& \times \left(\sum_{p=0}^{2-j} \binom{p+1}{3-j} \max |\varphi^{(p+1)}| \|A^{-p}\| \|A^{p+j} u^{(3-(p+j))}\| \right)_{L_2((a,b),H)} \leq \\
& \leq \text{const} \cdot \|u\|_{W_2^3((a,b),H)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|u\|_{W_2^4((a',b'),H)} \leq \text{const} \cdot \|P(d/dt)v\|_{L_2(R_+,H)} \leq \text{const} \cdot \|u\|_{W_2^3((a,b),H)}.$$

Используя это неравенство, докажем внутреннюю компактность пространства $L(P, R_+)$.

Пусть $M > 0$ любое число и обозначим

$$Q_M = \{u/u \in L(P, R_+), \|u\|_{W_2^3((a,b),H)} \leq M\}.$$

Мы должны доказать, что Q_M – компактное множество в норме пространства $W_2^3((a',b');H)$, где $a < a' < b' < b$. Пусть $\tilde{Q}_M = Q_M \cap \text{Ker}(P, R_+)$ и покажем, что \tilde{Q}_M компактно относительно нормы пространства $W_2^3((a',b');H)$. Так как при $u \in \tilde{Q}_M \subset \text{Ker}(P, R_+)$

$$\|u\|_{W_2^3((a,b),H)} \leq \text{const} \cdot \|u\|_{W_2^3((a,b),H)},$$

то \tilde{Q}_M ограничено по норме $\|u\|_{W_2^4((a',b'),H)}$, т.е. \tilde{Q}_M - ограниченное множество в пространстве $W_2^4((a',b');H)$. Так как A^{-1} - вполне непрерывен, то вложение $W_2^4((a',b');H) \subset W_2^3((a',b');H)$ компактно [3], т.е. \tilde{Q}_M - компактное множество в $W_2^3((a',b');H)$. Таким образом, $L(P, R_+)$ внутренне компактно. Тогда из инвариантности пространства $L(P, R_+)$ относительно сдвига, по теореме Лакса, вытекает, что существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$\int_0^{\infty} e^{-2\varepsilon_0 t} (\|u_t\|_H^2 + \|A^3 u\|_H^2) dt < \infty.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., "Мир", 1971, 371 с.
2. Lax P.D. Pragmen – Lindelof theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations. //Comm. Pure Appl. Math., 1957, p.361-389.
3. Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку, «Элм», 1985, 220 с.

BİR SINIF DÖRDTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN REQULYAR HƏLLƏRİ FƏZASINDA DAXİLİ KOMPAKTLIQ

R.Z.HÜMBƏTƏLİYEV

XÜLASƏ

Baxılan işdə bir sinif dördtərtibli bircins operator-diferensial tənliklərin requlyar həlləri fəzasında daxili kompaktlıq anlayışının tərifini verilmiş və həmin həllərin daxili kompaktlığı üçün kafi şərtlər göstərilmişdir. Belə ki, tənliyin baş hissəsi çoxqat xarakteristikaya malikdir. İşdə həm də bircins dördtərtibli operator-diferensial tənliklərin requlyar həlləri üçün Fragmen-Lindelyof tipli teorem isbat edilmiş və bu həllər operator-diferensial tənliyin operator əmsalları ilə ifadə olunmuşdur.

INNER COMPACTNESS OF SPACES OF REGULAR SOLUTIONS OF A FOURTH ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

R.Z.HUMBATALIYEV

SUMMARY

In the paper the definition of inner compactness of spaces of regular solutions of a fourth order homogeneous operator-differential equation is given and sufficient conditions for inner compactness of these solutions are cited, the main part of which has the multi characteristic. Proof the theorem Fragmen-Lindelof of regular solutions of a fourth order homogeneous operator-differential equations. These conditions are expressed by the help of the operator-differential equations coefficients.